拟合的其他方法

慧航

2025年9月

加权平均

为了使得样本对总体的代表性更好，我们可能需要在做统计分析时对数据进行加权。

- 比如，在很多的抽样调查中，为了得到比较好的统计性质，通常抽样并非等概率的进行，而是针对某一群体，比如低收入家庭等，进行有重点地抽样。
- 此时，如果我们希望获得收入的总体均值，简单的计算样本平均会导致平均收入的低估。

Horvitz-Thompson估计量

为了解决这一问题，通常我们会使用**Horvitz-Thompson估计量**，也就是使用每个样本被抽中的概率π_i的倒数$1/\pi_i$作为权重，计算加权平均：

$$\bar{x}^w = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\pi_i}x_i$$

其中$M = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\pi_i}$为总体中个体的数量。**Horvitz-Thompson估计量为总体均值的无偏估计量。**

逆概率加权

重新整理该估计量，有：

$$\bar{x}^w = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\pi_i}x_i = \frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\pi_i}x_i}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\pi_i}} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\frac{1}{\pi_i}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\pi_i}}\right)x_i \triangleq \sum_{i=1}^{N}w_i x_i$$

以上估计量也称为加权平均（weighted average），其中权重为概率的倒数，因而通常也被称为**逆概率加权（inverse probability weighting）**。

逆概率加权

概率的倒数可以简单理解为一个样本代表了总体中多少个个体，

- 如果一个样本被抽中的概率为万分之一，那么一个样本大概代表了一万个个体。
- 在实际的调查数据中，通常会使用“一个个体代表了多少个个体”这种形式来给出权重。

逆概率加权

Stata中的加权

在中国家庭金融调查（China Household Finance Survey）的数据（chfs_ind.dta）中，如果不使用权重，swgt变量指明了数据中1个人代表了总体中的多少人。在Stata中，有四种加权方式可供使用：

- fweight：频数权重，即如果我们观察到m个一模一样的观测，那么我们可以将这m个一模一样的观测合并为一个观测，并设其权重为m。
- aweight：分析权重，适用于加总的数据，比如我们使用的数据为每个省份的平均值，那么可以用省份的人口作为权重。权重在使用时会默认规范化所有的权重之和为N：$\sum_{i=1}^{N} w_i = N$。
- pweight：抽样权重，适用于抽样数据，权重为每个个体被抽中的概率的倒数，也就是我们刚刚提到的权重。
- iweight：重要性权重，Stata内部处理方法与aweight类似，区别在于使用iweight不会做规范化，适用于出于其他目的的加权。

逆概率加权

Stata中的加权

我们可以使用如下命令计算加权平均:

```
su labor_inc [aw=swgt]
```

加总数据的加权

加权平均的另一个应用是在加总的数据中。比如如果我们有每个城市的平均收入，为了计算全国的平均收入，我们可以按照如下计算：

$$\bar{x}=\frac{\sum_{c=1}^{C}\left(\bar{x}_c\times p_c\right)}{\sum_{c=1}^{C}p_c}=\sum_{c=1}^{C}\left(\frac{p_c}{\sum_{c=1}^{C}p_c}\times\bar{x}_c\right)\triangleq\sum_{c=1}^{C}\left(w_c\times\bar{x}_c\right)$$

实际上，以上计算方法也是一种逆概率加权：

- 由于对于城市数据而言，每个城市只有1条数据，从而$1/p_c$代表了每个城市c中一个个体被抽中的概率
- 从而根据逆概率加权的思想，权重应该为$1/(1/p_c)=p_c$，即使用人口数量进行加权。

加总数据的加权

使用城市平均计算全国平均

如果我们需要计算2010年全国人均公共图书册数，使用citydata.dta中的城市数据，我们分别计算了使用人口加权和不加权两种不同的均值：

```
use datasets/citydata.dta, clear
keep if year==2010
su v210
su v210 [aw=v4]
```

根据计算结果，未使用加权平均计算的人均公共图书册数约为4.89册，而使用人口加权后，得到的结果为5.27册，如果人口多的城市人均公共册数也多，那么后者对于全国人均公共图书册数的计算更加精确，而未加权的结果会低估全国的平均册数。

加权最小二乘

在线性回归中同样面临着需要加权的问题，此时可以使用加权最小二乘法，即最小化经过权重调整的误差平方和：

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^{N} \left[w_i \left(y_i - x_i' \beta \right)^2 \right]$$

从而得到：

$$\hat{\beta}^{w} = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i x_i' \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i \right)$$

其中w_i为权重。

加权最小二乘

在一些抽样调查数据中，可以使用逆概率加权的方法对估计量进行调整，即令$w_i = 1/\pi_i$，这与我们上面计算加权平均的方法是一样的。如果使用逆概率加权，我们可以将以上计算公式写为：

$$\hat{\beta}^w = \left(\frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\pi_i} x_i x_i'}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\pi_i}}\right)^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\pi_i} x_i y_i}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\pi_i}}\right)$$

即将OLS公式中的两部分分别替换为了其无偏估计。

加权最小二乘

CHFS中的权重

在2002年中国家庭金融调查数据中，如果要比较不同教育程度的对数收入，可以使用如下回归：

```
gen log_income=log(labor_inc)
reg log_income i.a2012
```

而注意到由于抽样的问题，每个样本的重要性是不一样的，我们可以使用swgt变量作为权重进行加权：

```
gen log_income=log(labor_inc)
reg log_income i.a2012 [w=swgt]
```

得到的结果与不加权的相比有一些变化，两个结果相比较，不加权的回归系数可能低估了高教育程度与低教育程度的收入差距。

加总数据的权重

- 正如在加总数据中计算均值可能需要加权平均一样，在一些加总数据中，也需要使用加权最小二乘。
- 比如，如果对于每一个个体，有回归方程：

$$y_{ig} = x'_{ig}\beta + u_{ig}, g = 1, ..., G$$

其中g为一个分组变量，比如省份或者城市

- 但是我们观察不到个体数据，只能使用平均数据：

$$\bar{y}_g = \bar{x}'_g\beta + \bar{u}_g, g = 1, ..., G$$

此时我们可以认为g组的N_g个个体被一个抽象的“平均个体”$(\bar{y}_g, \bar{x}'_g)'$所代表了，因而类比于逆概率加权，可以使用N_g作为权重进行加权。

加总数据中的异方差

在上面的例子中使用加权最小二乘同时可能还处理了异方差问题。

- 如果假设$u_{ig} \sim (0, \sigma^2)$，那么$\bar{u}_g \sim (0, \sigma^2/N_g)$，从而出现了异方差问题：方差随着每个城市人口的变化而变化。
- 此时，我们可以考虑在方程两边同时乘以$\sqrt{N_g}$，得到：

$$\sqrt{N_g}\bar{y}_g = \sqrt{N_g}\bar{x}_g'\beta + \sqrt{N_g}\bar{u}_g$$

  那么此时$\sqrt{N_g}\bar{u}_g \sim (0, 1)$，从而消去了异方差问题。
- 再进行最小二乘回归，就得到了：

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \left(\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\sqrt{N_g}\bar{x}_g\right)\left(\sqrt{N_g}\bar{x}_g\right)'\right]\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\sqrt{N_g}\bar{x}_g\right)\left(\sqrt{N_g}\bar{y}_g\right)\right]\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N}\left[N_g\bar{x}_g\bar{x}_g'\right]\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[N_g\bar{x}_g\bar{y}_g'\right]\right)\end{aligned}$$

  上式无非就是使用N_g作为权重的加权最小二乘。

加权最小二乘

美国单边离婚法案

Friedberg（1998）在研究单边离婚法案（unilateral divorce law）对美国离婚率的影响时，使用了如下设定：

$$divrate = b_0 + b_1 \times unilateral + x'\beta + u$$

由于离婚率可以看成是一个州每个女性是否离婚的均值，所以他们在回归时使用州的人口作为权重，以下代码展示了他们的基础回归结果：

加权最小二乘

美国单边离婚法案

```
clear
set more off
use "datasets/Divorce-Wolfers-AER.dta"
egen state=group(st)
// reg
reg div_rate unilateral divx* i.state i.year if year>1967 & year
    <1989
reg div_rate unilateral divx* i.state i.year if year>1967 & year
    <1989 [w=stpop]
```

局部估计

考虑一个一维的x

- 如果如果我们希望获得

$$\mathbb{E}\left(y|x=x_0\right)$$

  的估计，我们仅仅关心在$x=x_0$点处的估计
- 一个最简单的方法是在最小二乘法的目标函数中，给与$x=x_0$点附近的样本残差平方以更大的权重，而远离$x=x_0$点处的样本残差平方以更小的权重
- 那么只要最小化加权的最小二乘目标函数：

$$\min_{\beta}\sum_{i=1}^{N}\left[w_i\left(y_i-\alpha-\beta x_i\right)^2\right]$$

- 问题：权重如何选取？

核函数

权重一般可以如下选取:

- 令$K(x)$为一个以纵轴对称的函数，即$K(x)=K(-x)$，从而$\int_{\mathbb{R}} xK(x)\,dx=0$，且在$x\in[0,\infty)$是单调递减的，$K(x)\geq 0$
- 令权重:

$$w_i = K\left(\frac{x_i - x_0}{h}\right)$$

其中$h>0$为**窗宽（bandwidth）**，而$K(x)$被称为**“核函数”（kernel function）**

- 一般核函数可以选取为对称分布的密度函数。

Rectangle核函数

如果令:

$$K_0(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

那么权重为:

$$w_i = K_0\left(\frac{x_i - x_0}{h}\right) = \begin{cases} 1 & x_0 - h \le x_i \le x_0 + h \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

带入到目标函数中去，就得到了:

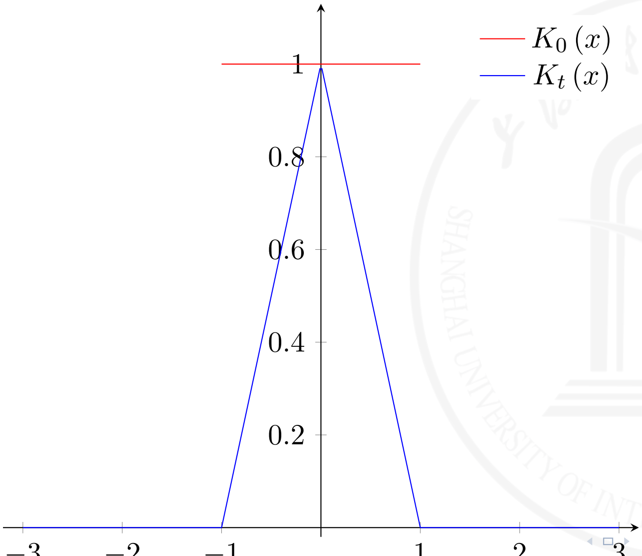
$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^{N} \left[1\left\{|x_i - x_0| \le h\right\} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \right]$$

以上目标函数等价于在区间$[x_0 - h, x_0 + h]$内做简单的最小二乘法。

Rectangle核函数

- 这也就是h取名“窗宽”的由来：
  - h决定了x_0附近区间的大小，h越小，则在x_0附近取的区间越小，使用的数据量也就越少。
- 注意到$K_0\left(x\right)$在临近的区间内权重都相等，所以我们也称其为矩形（rectangle）核函数

核函数



Triangle核函数

- 我们还可以令权重在临近区间内不相等：当x_{i}距离x_{0}越近时权重越高
- 此时可以在$K_0\left(x\right)$的基础上进行修改，使用：

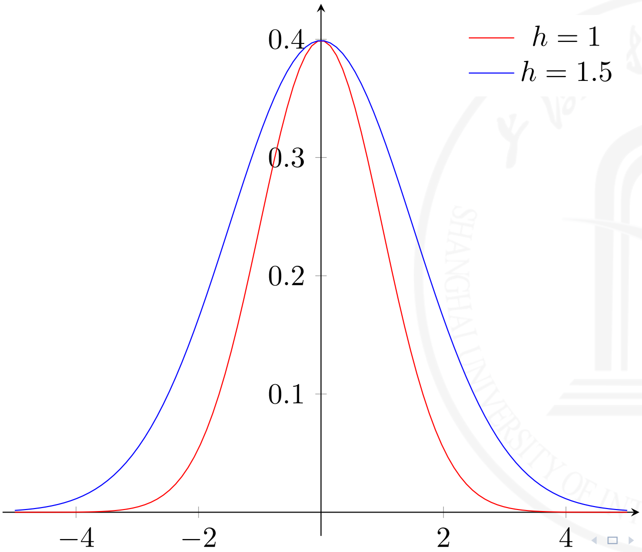
$$K_t\left(x\right)=\begin{cases}1-|x| & |x|\leq 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

- 该函数同样在$|x|>1$时取值为0，但是在$|x|\leq 1$这个区间内，随着x远离0，有个递减的过程。
- 我们称该核函数为三角（triangle）核函数。

高斯核函数

- 或者，也可以取$K(x)=\phi(x)$，其中$\phi(\cdot)$为标准正态分布的密度函数，该核函数被称为高斯核函数。
- 权重：$w_i=\phi\left(\frac{x_i-x_0}{h}\right)$
  - 同样的，当x_i越靠近x_0时，权重w_i越大
  - 不过不会像$K_0(x)$那样变为0，而是会收敛到0。
  - 而在这种情况下，h同样也被称为窗宽，因为h扮演的作用是一样的：
    - h越大，则随着x_i远离x_0，权重收敛到0的速度越慢，相当于用了一个更“大”的区间；
    - 反之h越小，则权重收敛到0的速度越快，相当于用了一个更“小”的区间。

核函数



局部常数估计

- 如果只在局部使用常数项对$\mathbb{E}\left(y|x=x_0\right)$进行估计：

$$\min_{\beta}\sum_{i=1}^{N}\left[w_i\left(y_i-\alpha\right)^2\right]$$

- 此时可以计算得到：

$$\hat{y}_0=\hat{\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{N}w_iy_i}{\sum_{i=1}^{N}w_i}=\sum_{i=1}^{N}\frac{w_i}{\sum_{i=1}^{N}w_i}y_i=\sum_{i=1}^{N}w_i^*y_i$$

其中w_i^*为规范化的权重，使得$\sum_i w_i^*=1$。

局部常数估计

- 如果将核函数带入，就得到了：

$$\hat{y}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x_i - x_0}{h}\right) y_i}{\sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x_i - x_0}{h}\right)}$$

  - 如果我们取核函数$K(\cdot) = K_0(\cdot)$，以上估计量无非就是在$(x_0 - h, x_0 + h)$邻域内对y_i进行一个简单的加权平均
  - 如果取$K(\cdot) = \phi(\cdot)$，也是同样的道理
- 以上估计量也被称为“局部常数项估计”（local constant estimator）。

局部常数估计

一个模拟

假设数据生成过程：

$$y = \exp\left(\sin x^3\right) + u$$

其中$x \sim U\left(0, 2\right), u \sim N\left(0, 1\right)$，假设样本量$N = 300$。如果我们关心的是当$x = 2$时$y$的预测值（真实值为2.6895），我们选取标准正态分布的密度函数作为核函数，此外选取$h = 0.1$，计算得到$\hat{y}_{x=2} = 2.07$（local_constant.do）。

局部线性估计

- 注意到，在上例中，局部常数项回归计算的实际上是在$x=2$的一个小的邻域中的均值
- 然而在上例中，由于x=2恰好是x的取值范围的上界，所以我们实际上只使用了x=2左边的一个小的邻域$(2-h,2)$。
- 可以想象，由于在$x=2$左边，真实的数据生成过程是单调递增的，所以在这个小邻域中计算均值会低估$\mathbb{E}\left(y|x=2\right)$。
  - 上例的结果也可以看出，局部常数项的估计的确低估了$\mathbb{E}\left(y|x=2\right)$。

局部线性估计

- 为此，我们可以在这个小的邻域中做一个线性回归。
- 一个常用的处理方法是首先计算$x^{\#} = x - x_0$，带入到目标函数中就是：

$$\min_{\alpha,\beta} \sum_{i=1}^{N} \left[K\left(\frac{x_i - x_0}{h}\right) \left(y_i - \alpha - \beta x_i^{\#}\right)^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow \min_{\alpha,\beta} \sum_{i=1}^{N} \left[K\left(\frac{x_i - x_0}{h}\right) \left[y_i - \alpha - \beta\left(x_i - x_0\right)\right]^2 \right]$$

- 当$x = x_0$时，$x^{\#} = 0$，从而对于$\mathbb{E}\left(y|x = x_0\right)$的预测$\hat{y}_{x=x_0} = \hat{\alpha}$。
- 由于该方法可以看作是在一个小的邻域中使用线性回归对$x = x_0$处的y进行预测，所以也叫做局部线性（local linear）回归。

局部线性回归

局部线性回归模拟

接上例，我们可以使用如下代码进行局部线性回归：

```
gen w=normalden((x-2)/0.1)
gen x_2=x-2
reg y x_2 [iw=w]
di _b[_cons]
```

结果为$\hat{y}_{x=2} = 2.776$，与真实值更为接近，并且没有低估真实值了。

局部多项式回归

更一般的，我们可以使用**局部多项式**（local polynomial）回归：

$$\min_{\beta}\sum_{i=1}^{N}\left[K\left(\frac{x_i-x_0}{h}\right)\left(y_i-\alpha-\sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(x_i^{\#}\right)^k\right)^2\right]$$

在局部进行更精细的逼近。

局部多项式回归

局部多项式回归模拟

接上例，我们可以使用如下代码进行局部三阶多项式回归：

```
gen w=normalden((x-2)/0.1)
gen x_2=x-2
gen x_22=x_2^2
gen x_23=x_2^3
reg y x_2* [iw=w]
di _b[_cons]
```

结果为$\hat{y}_{x=2} = 2.495$。

窗宽和多项式阶数选取

- 多项式阶数并不是越多越好，过高的多项式阶数会导致预测结果，特别是在端点的预测效果不稳定。
- 而关于窗宽h，考虑局部常数项回归以及$K(\cdot) = K_0(\cdot)$作为例子，此时的估计量无非是$(x_0 - h, x_0 + h)$区间的所有y_i的平均数
  - 可以想象一个过小的窗宽意味着能够使用的样本量更少，所以估计量的方差会很大；但是由于窗口比较小，我们上面所讨论的“低估”就会更不明显，也就是说估计量的偏差（bias）会更小。
  - 而反过来，一个大的窗宽会降低估计量的方差，但是偏差则会提高。
- 回忆均方误差可以写为偏差的平方和方差之和，所以理论上应该会有一个最优的h，使得均方误差达到最小。

选取方法

一般多项式阶数和窗宽的选取方法：

- 理论推导计算
  - 一些特殊情况有理论计算结果，如非参数回归、RD设计等
- 交叉验证
  - 我们仅仅关注$x = x_0$处的预测，所以在做交叉验证时，并不需要所有的样本点都作为测试集，而是仅仅把离x_0最近的一些点作为测试集就好了。

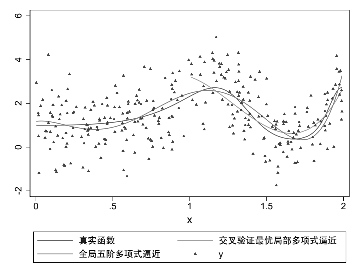
窗宽和多项式阶数选取

交叉验证选取多项式阶数和窗宽

接上例，我们使用local_poly_cv.do代码，在$p=1,2,...,5$阶多项式、$h=0.01,0.02,...,0.5$的范围内搜索最优的p和h的组合。在以上代码中，我们针对每一个(p,h)的组合，都使用与$x=2$最近的10个点作为测试集，用留一验证的方法在测试集上计算交叉验证的均方误差，最后选取交叉验证均方误差最小的(p,h)的组合，并进行了局部多项式的回归。选取的结果是当$h=0.48, p=3$时，均方误差最小，此时预测为$\hat{y}_{x=2}=2.743$，与真实值2.6895非常接近。

窗宽和多项式阶数选取

交叉验证选取多项式阶数和窗宽



多个解释变量

- 现在如果我们有两个解释变量，即$x=(x_1,x_2)'$，如果需要预测$\mathbb{E}\left(y|x_1=x_1^0,x_2=x_2^0\right)$，那么可以在$x$的两个维度上分别取一个核函数和一个窗宽，并使用两个变量核函数的乘积作为权重：

$$w_i=K_1\left(\frac{x_{1i}-x_1^0}{h_1}\right)K_2\left(\frac{x_{2i}-x_2^0}{h_2}\right)$$

然后做加权最小二乘就可以了。

- 由于必须在多个维度都很接近x_0才会对$\mathbb{E}\left(y|x=x_0\right)$的估计有贡献，然而在有限样本的情况下，随着维度的增加，x_0附近的点会越来越少，为了保证相对较小的方差，就必须扩大范围，而扩大范围会造成比较大的偏差，所以在多维解释变量的情况下，以上的局部多项式估计可能并不理想，我们将这种现象称为 **“维数的诅咒”（the curse of dimensionality）**。

分位数的定义

与之前类似，我们可以从总体和样本两个层面定义分位数：

- 总体分位数：对于一个分布函数$F(x)$，则定义q–分位数（q–Quantiles）为：

$$M_q = F^{-1}(q), 0 < q < 1$$

  - 回忆分布函数的定义为：$F(x) = P(X \leq x)$，因而$q = F(M_q) = P(X \leq M_q)$
- 样本分位数：一组数据中恰好有比例为q的观测小于m_q，有$1-q$的观测大于m_q

常用的分位数

由于$q \in (0,1)$，因而我们可以定义无数中分位数，常用的有：

- 中位数（median）：$q = 0.5$，即有一半小于中位数，一半大于中位数
- 四分位数（quartiles）：$q = 0.25/0.5/0.75$，三个四分位数将所有数据等分为四份
  - 四分位差：上四分位数减去下四分位数，通常用来度量离散程度，与方差类似
- 十分位数：9个分位数将数据分为十等分
- 百分位数（percentiles）：99个分位数将数据分为100等分

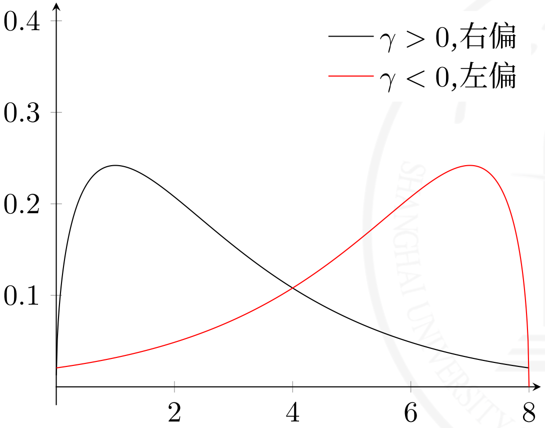
中位数的性质

中位数和样本均值都是数据集中趋势（或者平均水平的度量），但是具有和样本均值不同的性质：

- 均值容易受到异常值的影响，而中位数不容易受到异常值影响
  - 同样，四分位差相对于方差、标准差，也不容易受到异常值的影响
- 中位数、均值与偏态的关系：
  - 对于左偏分布，均值小于中位数
  - 对于右偏分布，均值大于中位数
  - 非参数偏度：$\gamma=\frac{\bar{x}-M_{\frac{1}{2}}}{s}$
- 中位数对于单调变换保持不变，而均值对非线性单调变换不保证成立，即对于非线性的函数$g(\cdot)$：

$$M_q(g(x))=g(M_q(x)),\mathbb{E}(g(x))\neq g(\mathbb{E}(x))$$

偏态与中位数、均值



中位数、均值的非线性单调变换

中位数、均值的对数变换

如果有一组数据：$1, 10, 100, 1000, 10000$，那么均值为：$\bar{x} = 2222.2$，中位数为$M_{\frac{1}{2}} = 100$，严重右偏

现在对这组数据进行对数变换，即$x_i^{\#} = \log_{10} x_i$，那么变换后的数据为：$0, 1, 2, 3, 4$，那么均值为：$\bar{x}^{\#} = 2$，中位数为$M_{\frac{1}{2}}^{\#} = 2$

注意到,

$$\log_{10} \bar{x} \approx 3.347 > \overline{\log_{10} x_i} = 2$$

而:

$$\log_{10} M_{\frac{1}{2}} = 2 = M_{\frac{1}{2}}^{\#}$$

中位数的计算

- 我们知道，期望是如下问题的解：

$$\mathbb{E}(x) = \arg\min_c \mathbb{E}(x-c)^2$$

而样本均值$\bar{x}$相应的定义为：

$$\bar{x} = \arg\min_c \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - c)^2$$

- 而总体中位数$M_{\frac{1}{2}}$则是如下问题的解：

$$M_{\frac{1}{2}} = \arg\min_c \mathbb{E}|x-c|$$

相应的，样本中位数可以通过解：

$$m_{\frac{1}{2}} = \arg\min_c \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - c|$$

得到。

中位数的计算

Why? 根据一阶条件：

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \mathbb{E}\left|X-c\right|}{\partial c} \\
&= \frac{\partial \int_{\mathbb{R}} \left|x-c\right| dF\left(x\right)}{\partial c} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \left|x-c\right|}{\partial c} dF\left(x\right) \\
&= \int_{c}^{\infty} \left(-1\right) dF\left(x\right) + \int_{-\infty}^{c} 1 dF\left(x\right) \\
&= -\left[1-F\left(c\right)\right] + \left[F\left(c\right)-0\right] \\
&= -1+2F\left(c\right)
\end{aligned}
$$

从而$c=F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$，即总体中位数。

$q-$分位数的计算

更进一步，对于任意的$q-$分位数，可以通过解：

$$M_q = \arg\min_c \mathbb{E}\psi_q\left(x - c\right)$$

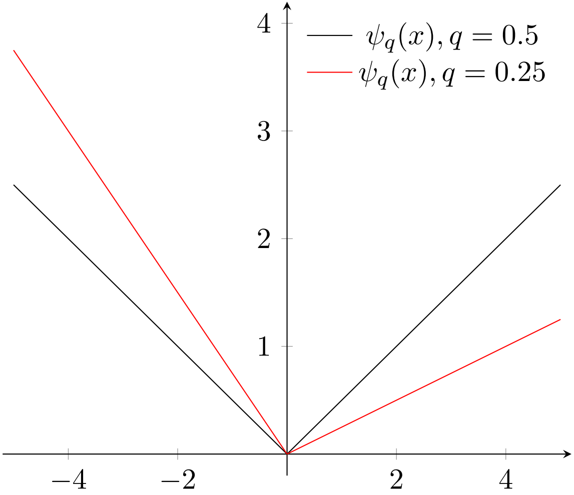
其中：

$$\psi_q\left(x\right) = \begin{cases} qx & x > 0 \\ \left(q-1\right)x & x \leq 0 \end{cases}$$

类似的，样本分位数可以通过解：

$$m_q = \arg\min_c \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_q\left(x_i - c\right)$$

$q-$分位数的计算



分位数回归

- 对于一组数据$\{(y_i, x_i'), i = 1, ..., N\}$，$y$的均值$\bar{y}$可以定义为：

$$\bar{y} = \arg\min_{c} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - c)^2$$

- 如果我们需要估计条件期望$\mathbb{E}(y|x)$，那么将c替换为$x_i'\beta$即可：

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\beta} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - x_i'\beta)^2$$

分位数回归

- 类似的，y的分位数$m_q(y)$可以定义为：

$$m_q(y) = \arg\min_c \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_q(y_i - c)$$

- 如果我们需要估计条件分位数$M_q(y|x)$，那么将c替换为$x_i'\beta$即可：

$$\beta_q = \arg\min_\beta \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_q\left(y_i - x_i'\beta\right)$$

  即为（$q-$）**分位数回归**（**quantile regression**）。
- 特别的，对于中位数，可以通过解：

$$\hat{\beta}_{\frac{1}{2}} = \arg\min_\beta \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|y_i - x_i'\beta\right|$$

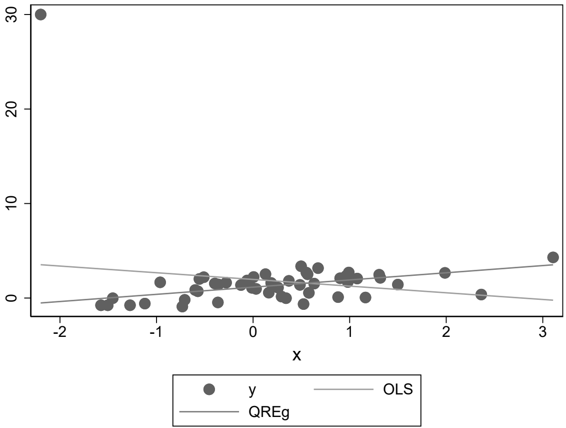
  即为**中位数回归**（**median regression**）

分位数回归 v.s. 线性回归

- 线性回归可以看成是对条件期望$\mathbb{E}(y|x)$的估计，而分位数回归是对条件分位数$Q_q(y|x)$的估计：
  - $\hat{y} = x'\hat{\beta}^{OLS}$为给定$x$，$y$的均值的估计
  - $\hat{y}_q = x'\hat{\beta}_q$为给定$x$，$y$的$q$−分位数的估计
  - $\hat{y}_q$对q应该是单调递增的，如果出现交叉，则意味着模型可能设定错误
- 线性回归只有一个系数β，而对于分位数回归，给定任意的一个q，都会有一个回归系数β_q
  - 在理想条件下，如果所有β_q都相等，那么$\beta^{OLS} = \beta_q$，特别的，$\beta^{OLS} = \beta_{\frac{1}{2}}$
  - 线性回归对异常值敏感，而分位数回归对异常值不敏感
- 例子：qreg_consump.do

分位数回归 v.s. 线性回归：异常值

qreg_outlier.do



分位数回归：解释

- 普通最小二乘的解释：对于回归：

$$y = \beta \cdot x + \tilde{x}'\delta + u$$

β解释为x增加1单位对y的期望的影响。

- 分位数回归的解释：对于分位数回归：

$$Q_q\left(y|x,\tilde{x}\right) = \beta_q \cdot x + \tilde{x}'\delta_q$$

β解释为x增加1单位，y的$q-$分位数增加β单位。

- 如果$x=0/1$为虚拟变量，那么：

$$\beta_q = Q_q\left(y|x=1,\tilde{x}\right) - Q_q\left(y|x=0,\tilde{x}\right)$$

即其他条件（$\tilde{x}$）不变，$x=1$组与$x=0$组$q-$分位数的差异：
qreg_with_dummy.do

分位数处理效应

在解释分位数回归时，一个特殊的背景是考虑**分位数处理效应**（**Quantile treatment effects**）

- 假设$W = 0/1$为一个处理，记反事实为$Y_i(W)$：
  - $Y_i(1)$为假设接受处理的结果
  - $Y_i(0)$为假设未接受处理的结果
  - 处理效应为$\Delta_i = Y_i(1) - Y_i(0)$
  - 平均处理效应为$\mathbb{E}(\Delta_i)$
- 假设$Y_i(1)$的分布函数为$F_{Y_1}(y)$，$Y_i(0)$的分布函数为$F_{Y_0}(y)$，那么：
  - $m_q(1) = F_{Y_1}^{-1}(q)$为假设所有个体都接受处理，结果$Y(1)$的$q-$分位数；
  - $m_q(0) = F_{Y_0}^{-1}(q)$为假设所有个体都不接受处理，结果$Y(0)$的$q-$分位数；
  - 分位数处理效应：$\Delta_q = m_q(1) - m_q(0)$，而非$m_q(\Delta_i)$（处理效应的分位数）。

分位数回归：随机系数的解释

或者，我们可以从随机系数（random coefficients）的角度来理解：

- 考虑如下数据生成过程：
  - 假设$q \sim U(0,1)$为一个均匀分布
  - $u = F^{-1}(q) \sim F$为真正的误差项，分布函数为F，或者说u为分布F的$q-$分位数
  - 数据生成过程为：

$$
\begin{aligned}
y &= \beta_0(q) + \beta_1(q)\cdot x_1 + \cdots + \beta_K(q)\cdot x_K + u \\
&= \beta_0(F(u)) + \beta_1(F(u))\cdot x_1 + \cdots + \beta_K(F(u))\cdot x_K + u
\end{aligned}
$$

  - 或者，所有系数都是随着误差项所处的分位数而变化的
  - 或者可以理解为，给定x，y的不同分位数对应着不同的系数
  - qreg_simulate.do

实例：外国援助与腐败

The effect of foreign aid on corruption: A quantile regression approach, Okada and Samreth （2011）

Table 2: Corruption and foreign aid

Dependent variable: Corruption

	(1) OLS	(2) Q 0.10	(3) Q 0.25	(4) Q 0.50	(5) Q 0.75	(6) Q 0.90
Log GDP per capita	-0.3595***	-0.5829***	-0.4438***	-0.2894***	-0.2538***	-0.2629***
	(0.0434)	(0.0711)	(0.0641)	(0.0487)	(0.0470)	(0.0589)
Democracy	-0.0187***	-0.0034	-0.0138	-0.0190***	-0.0254***	-0.0309***
	(0.0054)	(0.0105)	(0.0093)	(0.0067)	(0.0060)	(0.0061)
British legal origin	-0.2567***	-0.1995*	-0.2221**	-0.2855***	-0.2104***	-0.1685**
	(0.0621)	(0.1175)	(0.1031)	(0.0833)	(0.0729)	(0.0737)
Aid (Total)	-1.2738***	-3.2700***	-2.1376**	-0.4729	-0.7568*	-0.9903*
	(0.4850)	(1.0535)	(1.0394)	(0.5902)	(0.4152)	(0.5655)
Constant	6.5467***	7.6936***	6.9014***	6.0373***	6.0691***	6.3280***
	(0.3583)	(0.5940)	(0.5314)	(0.4083)	(0.3840)	(0.4986)
Countries	120	120	120	120	120	120
Observations	333	333	333	333	333	333