假设检验

司继春

[1]上海对外经贸大学

2025年11月

概览

一般的原假设

- 在以上两节中我们介绍了假设检验的一般概念和思路。我们知道，如果在原假设H_0的条件下得到检验统计量及其抽样分布，我们就可以使用上节中给出的步骤进行假设检验。
- 尽管上一节中我们讨论了一些初步的假设检验，然而很多时候我们可能希望对不止一个参数进行假设检验，或者对参数的函数进行假设检验。
- 一般的，记我们的原假设为：

$$H_0 : C(\theta) = 0$$

其中$\theta \in \mathbb{R}^k$，$C(\theta) \in \mathbb{R}^r$，且$C(\theta)$为$\theta$的连续可微函数。

单个参数的检验

- 经常在得到了某个参数θ的点估计以后，需要对这个参数进行假设检验。
- 在最简单的情况中，我们仅仅希望检验该参数是否等于（或者大于、小于）某一个具体数值。
  - 比如在回归分析中，我们经常需要使用$\theta_0 = 0$作为原假设进行假设检验。
- 此时的原假设应该为:

$$H_0 : C(\theta) = \theta - \theta_0 = 0$$

与区间估计类似，如果我们可以得到点估计量$\hat{\theta}$的（渐近）分布，那么我们可以通过其渐近分布构建检验统计量，进而对原假设进行检验。

单个参数的检验

泊松分布参数估计的假设检验

- 若$x_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$，我们希望在5%显著性水平下，对于原假设：$H_0 : \lambda = 10$进行检验。
- 首先得到点估计，其矩估计（极大似然估计）为：$\hat{\lambda} = \bar{x}$。
- 根据中心极限定理，有

$$\sqrt{N}\left(\hat{\lambda} - \lambda\right) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, \lambda)$$

因而

$$\frac{\sqrt{N}\left(\hat{\lambda} - 10\right)}{\sqrt{10}} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

- 如果$\left|\frac{\sqrt{N}(\hat{\lambda}-10)}{\sqrt{10}}\right| > 1.96$，则可以拒绝原假设。

Wald检验

- 如果对于θ的估计，我们已经有

$$\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta\right)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}\left(0,\Sigma\right)$$

那么使用Delta方法：

$$C\left(\hat{\theta}\right)=C\left(\theta\right)+\ddot{C}\left(\hat{\theta}-\theta\right)+O\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right|^{2}\right)$$

其中$\ddot{C}=\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta}$为在真值$\theta$处的$r\times k$的雅克比矩阵，且假设rank$\left(\ddot{C}\right)=r$，那么在原假设$H_0:C\left(\theta\right)=0$的条件下，带入$C\left(\theta\right)=0$，得到：

$$\sqrt{N}C\left(\hat{\theta}\right)=\ddot{C}\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)+o_p\left(1\right)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}\left(0,\ddot{C}\Sigma\ddot{C}'\right)$$

Wald检验

- 进而我们可以构建检验统计量：

$$C'\left(\hat{\theta}\right)\left[\frac{\ddot{C}\Sigma\ddot{C}'}{N}\right]^{-1}C\left(\hat{\theta}\right)\overset{a}{\sim}\chi^{2}\left(r\right)$$

可以使用以上检验统计量对原假设进行假设检验。

Wald检验

- 上式中$\ddot{C}$是在真值处取值的雅克比矩阵，然而真值无法观测，在实际计算时，可以直接使用其一致估计量$\hat{\ddot{C}}=\frac{\partial C(\hat{\theta})}{\partial \theta}$，即在$\hat{\theta}$处计算该雅克比矩阵然后带入即可。
- 注意当原假设成立时，以上检验统计量应该趋向于0，而备择假设成立时，检验统计量应该显著大于0，因而以上检验应为右侧检验，即当

$$C'\left(\hat{\theta}\right)\left[\frac{\ddot{C}\Sigma\ddot{C}'}{N}\right]^{-1}C\left(\hat{\theta}\right)>\chi^{2,(r)}_{1-\alpha/2}$$

时，在α的显著性水平下拒绝原假设。

Wald检验

Wald检验示例

- 假设$x_i \sim (\mu, \sigma^2)$，我们需要检验：$H_0 : \mu^2 = 1$，或者：$H_0 : \mu^2 - 1 = 0$。
  - 该原假设相当于同时检验了$\mu = \pm 1$。
- 由于

$$\hat{\mu} = \bar{x} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right)$$

从而使用Delta方法，有

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\left[\left(\hat{\mu}^2 - 1\right) - \left(\mu^2 - 1\right)\right] &= 2\mu\sqrt{N}\left(\hat{\mu} - \mu\right) + o_p(1) \\ &\overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(0, 4\mu^2\sigma^2\right)\end{aligned}$$

Wald检验

Wald检验示例

- 将原假设$H_0 : \mu^2 - 1 = 0$带入，得到:

$$\left(\frac{4\mu^2\sigma^2}{N}\right)^{-1/2}\left(\hat{\mu}^2 - 1\right) \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(0, 1\right)$$

从而:

$$\frac{\left(\hat{\mu}^2 - 1\right)^2}{\frac{4\mu^2\sigma^2}{N}} \overset{a}{\sim} \chi^2\left(1\right)$$

Wald检验

Wald检验示例

- 由于分母中μ, σ^2未知，我们可以使用其一致估计代替，从而：

$$\frac{N\left(\hat{\mu}^2-1\right)^2}{4\hat{\mu}^2\hat{\sigma}^2} \overset{a}{\sim} \chi^2(1)$$

- 当原假设成立时，以上检验统计量应该趋向于0，因而拒绝域在χ^2分布的右侧，因而该检验应为右侧检验。
- 即，当

$$\frac{N\left(\hat{\mu}^2-1\right)^2}{4\hat{\mu}^2\hat{\sigma}^2} > \chi^{2,(1)}_{1-\alpha/2}$$

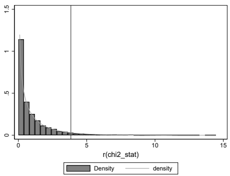
时，拒绝原假设。

Wald检验

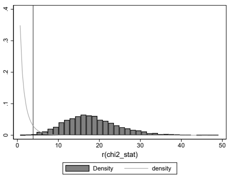
Wald检验示例

- 我们使用simulation_wald_test.do对以上检验在原假设和备择假设下分别进行了模拟，结果如下图所示
- 其中:
  - (a)展示了原假设下模拟的检验统计量的直方图以及$\chi^2(1)$的密度函数
  - 而(b)展示了原假设下模拟的检验统计量的直方图以及$\chi^2(1)$的密度函数。
  - 可以发现，虽然样本量比较少，原假设下检验统计量的分布与$\chi^2(1)$非常接近，而备择假设下两者有相当区别。
  - 原假设下检验统计量大于临界值的模拟次数大约占5.58%，与5%相差较小；而备择假设下大于临界值的模拟大约占99.74%。

Wald检验



(a)



(b)

似然比检验

- 极大似然估计通过最大化对数似然函数获得，即

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} L(\theta|\boldsymbol{x})$$

- 而与此同时，我们可以事先假设原假设成立，在H_0的约束下对θ进行估计，即

$$\tilde{\theta} = \arg\max_{\theta} L(\theta|\boldsymbol{x})$$
$$s.t. C(\theta) = 0$$

如此我们估计出的$\tilde{\theta}$必然满足原假设。

似然比检验

- 由于$\tilde{\theta}$是在H_0的约束条件下得到的，而$\hat{\theta}$是在无约束的条件下得到的，因而$L\left(\hat{\theta}|\boldsymbol{x}\right) \geq L\left(\tilde{\theta}|\boldsymbol{x}\right)$。
- 如果原假设成立，即$C\left(\theta\right)=0$，那么是否对极大似然不及施加原假设并不会对参数估计造成很大影响，从而$\tilde{\theta}$和$\hat{\theta}$应该充分接近，因而$L\left(\hat{\theta}|\boldsymbol{x}\right)$和$L\left(\tilde{\theta}|\boldsymbol{x}\right)$也应该充分接近；
- 但是如果原假设不成立，那么约束就会起作用，从而得到的$\tilde{\theta}$和$\hat{\theta}$应该有相当的差距，因而$L\left(\hat{\theta}|\boldsymbol{x}\right)$和$L\left(\tilde{\theta}|\boldsymbol{x}\right)$也应该有足够大的差距。
- 根据此逻辑，反过来，如果$L\left(\hat{\theta}|\boldsymbol{x}\right) \gg L\left(\tilde{\theta}|\boldsymbol{x}\right)$成立，那么我们可以认为$C\left(\theta\right)=0$是不成立的。

似然比检验

- 实际上，我们可以得到两个对数似然函数值在取得最大时，其差距的两倍服从一个卡方分布，即

$$LR = 2\left[L\left(\hat{\theta}|\boldsymbol{x}\right) - L\left(\tilde{\theta}|\boldsymbol{x}\right)\right] \overset{a}{\sim} \chi^2\left(r\right)$$

  因而我们可以根据以上结论对$C\left(\theta\right) = 0$进行检验。
- 注意原假设成立的条件下，$LR \approx 0$，而备择假设成立的条件下，$LR > 0$，所以以上检验同样是一个右侧检验。
- 以上检验我们通常成为**似然比检验**（likelihood-ratio test）。

似然比检验

泊松分布的似然比检验

如果$x_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$，$i = 1, ..., N$，如果原假设为$H_0 : \lambda = 1$

- 无约束时，$\hat{\lambda} = \bar{x}$，
- 有约束时，$\tilde{\lambda} = 1$。
- 其似然函数分别为：

$$L\left(\hat{\lambda}|x\right) = \sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln\left(\hat{\lambda}\right) - \ln\left(x_i!\right) - \hat{\lambda}\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln\left(\bar{x}\right) - \ln\left(x_i!\right) - \bar{x}\right]$$

$$L\left(\tilde{\lambda}|x\right) = \sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln\left(\tilde{\lambda}\right) - \ln\left(x_i!\right) - \tilde{\lambda}\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln\left(1\right) - \ln\left(x_i!\right) - 1\right]$$

似然比检验

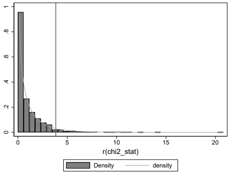
泊松分布的似然比检验

- 因而检验统计量为:

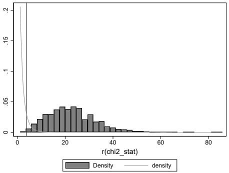
$$\begin{aligned} LR &= 2\left[\sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln\left(\bar{x}\right) - \ln\left(x_i!\right) - \bar{x}\right] - \sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln\left(1\right) - \ln\left(x_i!\right) - 1\right]\right] \\ &= 2\left[\sum_{i=1}^{N}\left[x_i \ln\left(\bar{x}\right) - \bar{x} + 1\right]\right] \\ &= 2N\left[\ln\left(\bar{x}\right)\bar{x} - \bar{x} + 1\right] \\ &\overset{a}{\sim} \chi^2\left(1\right) \end{aligned}$$

- 模拟: simulation_lr_test.do

似然比检验


0
.2
.4
.6
.8
1
0
5
10
15
20
r(chi2_stat)
Density
density

(a)


0
.05
.1
.15
.2
0
20
40
60
80
r(chi2_stat)
Density
density

(b)

似然比检验

Beta分布的似然比检验

如果$x_i \sim \mathcal{B}eta\left(\alpha, \beta\right)$，原假设为：$H_0 : \alpha = 1, \beta = 1$此时我们需要同时检验两个假设，我们仍然可以通过似然比检验对其进行检验。

- 如果$\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$为极大似然估计，那么无约束时的似然函数为：

$$L\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}|x\right) = \sum_{i=1}^{N}\left[-\ln B\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) + \left(\hat{\alpha} - 1\right)\ln x_i + \left(\hat{\beta} - 1\right)\ln\left(1 - x_i\right)\right]$$

- 而有约束时的似然函数：

$$L\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}|x\right) = L\left(1, 1|x\right) = -N\ln B\left(1, 1\right) = 0$$

- 从而似然比检验统计量为：

$$LR = 2\sum_{i=1}^{N}\left[-\ln B\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) + \left(\hat{\alpha} - 1\right)\ln x + \left(\hat{\beta} - 1\right)\ln\left(1 - x\right)\right] \overset{a}{\sim} \chi^2\left(2\right)$$

拉格朗日乘子检验

- 似然比检验构造虽然简单，但是其有一个缺点即需要估计两次极大似然估计：无约束的极大似然估计和有约束的极大似然估计。
- 相比之下，Wald检验只需要估计无约束的估计，且不仅限于极大似然估计，似乎更方便。
- 然而有的时候，估计有约束的问题比估计无约束的问题要简单很多。
    - 比如在以上Beta分布的例子中，有约束的估计甚至不需要计算，约束（原假设）本身已经给出了答案，相比之下无约束的估计会复杂很多。
- 那么，是否可以只计算有约束的估计从而进行检验呢?

拉格朗日乘子检验

- 考虑有约束的极大似然估计问题，通常我们可以使用拉格朗日乘子法求解：

$$\mathscr{L}(\theta,\lambda)=L(\theta|\boldsymbol{x})-\lambda C(\theta)$$

从而一阶条件为

$$\frac{\partial\mathscr{L}(\theta,\lambda)}{\partial\theta}=\frac{\partial L(\theta|\boldsymbol{x})}{\partial\theta}-\lambda\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta}=0$$
$$\frac{\partial\mathscr{L}(\theta,\lambda)}{\partial\lambda}=-C(\theta)=0$$

从而解得$\tilde{\theta}$。

拉格朗日乘子检验

- 考虑如果原假设成立，即对于真值θ，约束$C(\theta)=0$成立，那么此时$\tilde{\theta}$应该同时可以最大化$L(\theta|\boldsymbol{x})$，从而：

$$\frac{\partial L\left(\tilde{\theta}|x\right)}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{N}s_i\left(\tilde{\theta}\right)\approx 0$$

  我们可以通过检验以上一阶条件是否成立来检验原假设是否成立。
- Rao（1948）提出了如上检验，由于以上检验实际上等价于检验得分函数的期望$\mathbb{E}\left[s_i\left(\tilde{\theta}\right)\right]=0$，从而以上检验被称为**得分检验**（**score test**）。
- 如果取原假设为$H_0:\theta=\theta_0$，从而$\ddot{C}=1$，带入以上拉格朗日乘子法的一阶条件中，就可以得到$\lambda=\sum_{i=1}^{N}s_i\left(\tilde{\theta}\right)$，因而Aitcheson和Silvey（1958）以及Silvey（1959）将称为**拉格朗日乘子检验**（**Lagrangian multiplier test，LM test**）。

拉格朗日乘子检验

- 为了构造渐近分布，注意到在原假设的条件下，$\mathbb{E}\left(s_i\left(\tilde{\theta}\right)\right)=0$，从而其渐近分布为

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}s_i\left(\tilde{\theta}\right)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}\left(0,\mathcal{I}_0\right)$$

从而可以使用

$$\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}s_i\left(\tilde{\theta}\right)\right]'\mathcal{I}_0^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}s_i\left(\tilde{\theta}\right)\right]\overset{a}{\sim}\chi^2\left(r\right)$$

进行假设检验。

- 由于$\mathcal{I}_0$不可观测，实际使用时可以将有约束的极大似然估计带入，从而得到其估计$\tilde{\mathcal{I}}$，带入上式即可。

拉格朗日乘子检验

Beta分布的LM检验

考虑使用得分检验对似然比检验中Beta分布检验的问题构造检验统计量。

- 极大似然函数为

$$L(\alpha, \beta|x) = \sum_{i=1}^{N} \left[-\ln B(\alpha, \beta) + (\alpha - 1)\ln x_i + (\beta - 1)\ln(1 - x_i)\right]$$

- 首先计算得分函数:

$$s_i(\alpha, \beta) = \frac{\partial L(\alpha, \beta|x_i)}{\partial \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \ln x_i \\ -\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \ln(1 - x_i) \end{bmatrix}$$

拉格朗日乘子检验

Beta分布的LM检验

- 记$\psi_0(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$为多伽马函数（polygamma function），根据其性质：$\psi_0(z+1) = \psi_0(z) + \frac{1}{z}$
- 将原假设$\alpha = \beta = 1$（从而有约束的估计$\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 1$）带入，得到

$$s_i\left(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right) = \begin{bmatrix} 1 + \ln x_i \\ 1 + \ln(1 - x_i) \end{bmatrix}$$

继续求海塞矩阵有

$$H_i(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} -\psi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha+\beta) & \psi_1(\alpha+\beta) \\ \psi_1(\alpha+\beta) & -\psi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

其中$\psi_1(z) = \frac{d}{dz}\psi_0(z) = \frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z)$

拉格朗日乘子检验

Beta分布的LM检验

- 带入原假设得到

$$\tilde{\mathcal{I}} = \tilde{H} = -\begin{bmatrix} -\psi_1(1) + \psi_1(2) & \psi_1(2) \\ \psi_1(2) & -\psi_1(1) + \psi_1(2) \end{bmatrix}$$

从而检验统计量为

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix} 1 + \ln x_i \\ 1 + \ln(1 - x_i) \end{bmatrix}\right)' \tilde{\mathcal{I}}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix} 1 + \ln x_i \\ 1 + \ln(1 - x_i) \end{bmatrix}\right) \overset{a}{\sim} \chi^2(2)$$

拉格朗日乘子检验

Beta分布的LM检验

- 其中ψ_0, ψ_1函数可以由计算机语言计算
  - 比如在Stata中，两个函数分别可以通过digamma(x)以及trigamma(x)两个函数计算。
- 以上检验过程甚至无需进行参数估计，只需要将原假设带入以上公式即可，是非常方便的办法。

拉格朗日乘子检验

- 以上拉格朗日乘子检验不仅可以应用在极大似然估计中，在其他检验中也可以类似应用。
- 比如，对于所有通过最大（小）化目标函数得到估计的估计量中，都可以计算无约束最优化的一阶条件，并将有约束估计量带入，检验一阶条件是否为0。
  - 比如我们前面提到，矩估计可以转化为广义矩估计，从而转化为一个求极值的问题，当然可以采用类似手段。

拉格朗日乘子检验

- 或者，在矩估计中，我们可以将约束下的矩估计量带入计算，在原假设的条件下有

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\tilde{\theta}\right) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(0,\mathbb{V}\left[g\left(w_i,\theta\right)\right]\right)$$

其中

$$\mathbb{V}\left[g\left(w_i,\theta\right)\right]=\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta\right)g\left(w_i,\theta\right)'\right]$$

- 从而检验统计量为:

$$\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\tilde{\theta}\right)\right]'\left(\mathbb{V}\left[g\left(w_i,\theta\right)\right]\right)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} g\left(w_i,\tilde{\theta}\right)\right] \overset{a}{\sim} \chi^2\left(r\right) \tag{1}$$

其中在原假设条件下，$\tilde{\theta} \xrightarrow{p} \theta_0$，从而$\mathbb{V}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]$可以使用

$$\mathbb{V}\left[g\left(w_i,\tilde{\theta}\right)\right]=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[g\left(w_i,\tilde{\theta}\right)g\left(w_i,\tilde{\theta}\right)'\right]\right)^{-1}$$

计算得到。

拉格朗日乘子检验

泊松分布的LM检验

- 对于泊松总体，我们知道总体矩条件为$\mathbb{E}\left(x_i-\lambda\right)=0$从而矩估计为$\hat{\lambda}=\bar{x}$。
- 为了检验$H_0:\lambda=10$，在原假设的约束下，约束估计量为$\tilde{\lambda}=10$
- 从而在原假设的条件下：

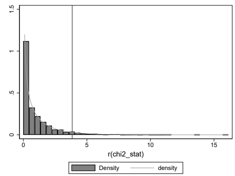
$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-10\right)\overset{a}{\sim}\mathcal{N}\left(0,10\right)$$

- 进而可以构建检验统计量：

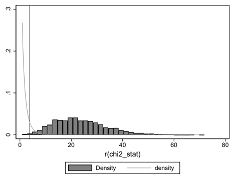
$$\frac{1}{N\times 10}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-10\right)\right]^2\overset{a}{\sim}\chi^2\left(1\right)$$

- 模拟：simulation_lm_test.do

拉格朗日乘子检验


0
.5
1
1.5
0
5
10
15
r(chi2_stat)
Density
density

(a)


0
.1
.2
.3
0
20
40
60
80
r(chi2_stat)
Density
density

(b)

LM检验与模型设定检验

- 由于得分检验通常依赖于有约束的参数估计，而有约束的参数估计通常比较容易计算，所以在很多检验，特别是模型设定检验或者模型诊断中非常有用。
- 通常我们可以先计算一个简单的模型（带约束的），使用得分检验检验是否需要进行更复杂的模型
  - 如果该检验不显著，那么意味着使用复杂模型的必要性不足；
  - 否则如果检验显著，则意味着我们可能需要更复杂的模型。

LM检验与模型设定检验

一元线性回归中的LM检验

- 考虑一元线性回归，假设
$$\mathbb{E}\left(y_i|x_i\right)=\alpha+\beta x_i$$
我们可以使用矩估计对以上问题进行估计。
- 然而我们可能会猜测x_i对y_i没有均值上的预测能力，即$\beta=0$
- 如果该假设成立，那么以上问题就变成了一个简单的正态总体参数估计问题。

LM检验与模型设定检验

一元线性回归中的LM检验

- 为此，我们可以设定原假设为：$H_0 : \beta = 0$从而得到估计：$\tilde{\alpha} = \bar{y}$。
- 为了检验该原假设，注意其总体矩条件为

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(y_i - \alpha - \beta x_i\right) = 0 \\ \mathbb{E}\left[x_i\left(y_i - \alpha - \beta x_i\right)\right] = 0 \end{cases}$$

- 注意到原假设成立时，以上矩条件即

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(y_i - \alpha\right) = 0 \\ \mathbb{E}\left[x_i\left(y_i - \alpha\right)\right] = 0 \end{cases}$$

LM检验与模型设定检验

一元线性回归中的LM检验

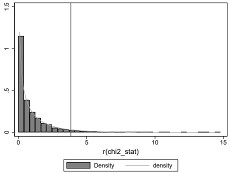
- 然而注意到样本矩条件中，$\sum_{i=1}^{N}(y_i - \tilde{\alpha}) = 0$必然成立，从而无需对该矩条件进行检验，只需要对$\mathbb{E}[x_i(y_i - \alpha)] = 0$进行检验即可。
- 令$e_i = y_i - \tilde{\alpha}$，在原假设条件下

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(x_i e_i) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(x_i e_i))$$

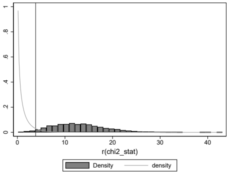
从而构造检验统计量：

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i e_i)\right]^2}{N\mathbb{V}(x_i e_i)} \overset{a}{\sim} \chi^2(1)$$

LM检验与模型设定检验



(a)



(b)

LM检验与模型设定检验

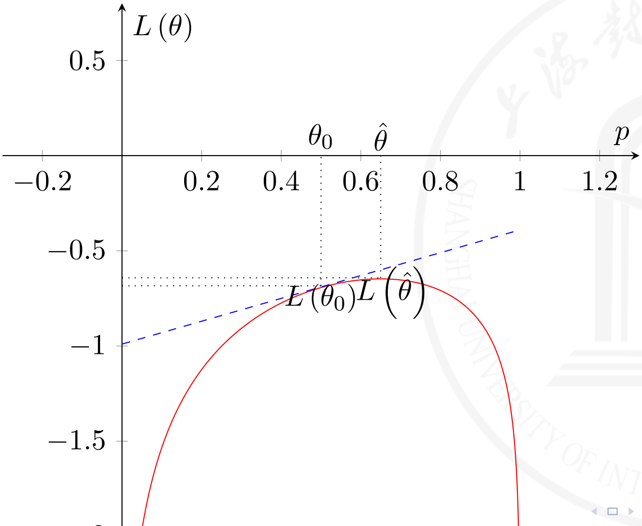
一元线性回归中的LM检验

- 因而，如果我们需要检验是否需要更复杂的线性回归模型，只需要计算以上统计量
  - 如果以上检验拒绝了原假设，那么意味着线性回归统计量是比简单的均值计算更好的模型，或者x对y有预测能力，从而可以进行线性回归的建模；
  - 反之，则代表现有证据对使用线性回归的证据不足，或者x对y有预测能力的证据不足。

三种检验的关系

- 以上我们介绍了三种构造假设检验的方法：Wald检验、似然比（LR）检验以及拉格朗日乘子（LM）检验。
- 其中
  - Wald检验需要估计不受约束的估计量；
  - LM检验需要估计受约束的估计量；
  - LR检验需要同时估计受约束和不受约束的估计量。
- 三种检验具有同样的极限分布（卡方分布）和自由度，实际上这并不是巧合，可以证明，以上三种检验是渐近等价的。

三种检验的关系


$L(\theta)$
0.5
θ_0
$\hat{\theta}$
p
−0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
−0.5
$L(\theta_0)$
$L\left(\hat{\theta}\right)$
−1
−1.5

三种检验的关系

- 观察上图
  - Wald检验重在检验θ_0与$\hat{\theta}$之间的距离；
  - LR检验重在检验似然函数$L(\theta_0)$与$L\left(\hat{\theta}\right)$之间的距离；
  - LM检验则是检验θ_0处切线的斜率。
- 如果原假设成立，那么应该有$\hat{\theta} \approx \theta_0$，从而$L\left(\hat{\theta}\right) \approx L(\theta_0)$，而此时切线斜率应该为0（由于最大化）。
- 因此三者虽然形式不同，但是本质上相同的检验。

最小卡方估计量

在矩估计一章中，我们证明了对于矩条件

$$\mathbb{E}\left[g\left(w_i,\theta_0\right)\right]=\mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} g_1\left(w_i,\theta_0\right)\\ \vdots \\ g_G\left(w_i,\theta_0\right)\end{bmatrix}\right)=0$$

其中$\theta_0\in\mathbb{R}^K, G\geq K$广义矩估计问题

$$\hat{\theta}=\arg\min_{\theta}\left[\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta\right)\right]'\hat{\Xi}\left[\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\theta\right)\right]$$

其中$\hat{\Xi}$为最优权重矩阵的估计，那么

$$J=\left[\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]'\hat{\Xi}\left[\sum_{i=1}^{N}g\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]\overset{a}{\sim}\chi^2\left(G-K\right)$$

最小卡方估计量

- 一个现实的问题是，由于真实的数据生成过程是未知的，我们所使用的的G个矩条件$g_1, ..., g_G$并不一定都是满足的，而是有可能会有错误设定，即存在j使得$\mathbb{E}\left[g_j\left(w_i, \theta_0\right)\right] \neq 0$。
- 如此，在使用了错误矩条件的前提下，也就无法得到θ_0的一致估计了。
- 那么有没有办法检验是否有矩条件是否错误呢？实际上以上的性质就给了我们答案。

J检验

- 如果取原假设为

$$H_0 : \mathbb{E}\left[g\left(w_i, \theta_0\right)\right] = 0$$

那么在原假设的条件下，以上卡方分布结论成立。

  - 此时，虽然目标函数$J \neq 0$，但是每个样本矩条件应该都比较接近于0，从而$J \approx 0$;

- 然然而如果其中存在错误的矩条件，那么$\hat{\theta}$不再是θ_0的一致估计，那么卡方分布结论就不再成立了。
  - 此时，由于存在错误的矩条件，错误的估计结果会使得J显著大于0。
- 从而，我们只要计算J，原假设下$J \overset{a}{\sim} \chi^2\left(G-K\right)$，使用**右侧检验**即可。

J检验

在使用该检验时，需要注意：

- 该检验是一个右侧检验，如果拒绝原假设代表有证据表明存在错误的矩条件；但是如果不能拒绝原假设，也不代表所有的矩条件都成立。
- 即使拒绝了原假设，该检验也无法知悉具体哪个矩条件是错误的。
- 使用该检验时，需要矩条件个数大于参数个数，即$G > K$。

过度识别检验

- 以上检验本质上是在检验不同的矩条件是否有矛盾的地方：我们可以任取其中的K个矩条件得到一个矩估计$\hat{\theta}^{(1)}$，再将$\hat{\theta}^{(1)}$带入到其余的矩条件中检查这些矩条件的取值是否约等于0。
- 我们将K个矩条件、K个参数的情况，即有唯一解的情况称为**精确识别（exactly identified）**
- 而$G > K$个矩条件的情况为**过度识别（over identified）**
- 从而这类检验也被称为**过度识别检验（overidentification test）**。
- 以上检验由Hanson（1982）提出，因此也被称为**Hanson的J检验**。

过度识别检验

泊松分布与负二项分布

- 如果我们假设$x_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$，同时使用前两阶矩条件，有

$$\begin{cases} \mathbb{E}(x_i - \lambda) = 0 \\ \mathbb{E}(x_i^2 - \lambda - \lambda^2) = 0 \end{cases}$$

然而如果$x_i \nsim \mathcal{P}(\lambda)$，那么$\mathbb{E}(x_i^2) \neq [\mathbb{E}(x_i)]^2 + \mathbb{E}(x_i)$，此时第二个矩条件就不再成立了。

- 比如，如果真实的$x_i \sim \mathcal{NB}(r, p)$，那么

$$\mathbb{E}(x_i^2) = \mathbb{V}(x_i) + [\mathbb{E}(x_i)]^2 = \frac{\mathbb{E}(x_i)}{p} + [\mathbb{E}(x_i)]^2 > [\mathbb{E}(x_i)]^2 + \mathbb{E}(x_i)$$

从而第二个矩条件不满足。

过度识别检验

泊松分布与负二项分布

- 此时，如果我们错误地使用泊松分布的假定，就会错误地设置第二个矩条件，得到的估计也就错误了。
- 借助这一性质，我们可以反过来使用过度识别检验来检验$x_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$是否成立：
  - 如果拒绝了原假设，也就意味着数据中的二阶矩与一阶矩的关系与泊松分布所预期的不一致，从而数据可能本身不服从泊松分布。
- 在Stata中，使用gmm命令后可以使用“estat overid”来获取过度识别检验的结果

过度识别检验

泊松分布与负二项分布

代码 1: 过度识别检验

```
// overid_nb_poi.do
clear
set seed 250211
set obs 100
gen x  = rnbinomial(5,0.2) // 期望为5×0.8/0.2=20
gen x2 = x^2
gmm (x-{lambda=1}) (x2-({lambda}+{lambda}^2)), winit(identity)
    igmm
estat overid
replace x  = rpoisson(20)
replace x2 = x^2
gmm (x-{lambda=1}) (x2-({lambda}+{lambda}^2)), winit(identity)
    igmm
estat overid
```

过度识别检验与LM检验

- 仔细观察可以发现，以上的过度识别检验与第拉格朗日乘子检验联系紧密。
- 虽然在LM检验中，我们没有限定GMM估计量使用最优权重矩阵，但是在式(1)中，$\tilde{\theta}$在原假设条件下是θ_0的一致估计，从而其形式与GMM中最小卡方估计量的分布是完全等价的。
  - 此时，r作为约束的个数，可以理解为多余的矩条件个数，从而$r = G - K$，是等价的。

过度识别检验与LM检验

多项式回归阶数

- 对于如下数据生成过程:

$$y_i = 1 + 2x_i + x_i^2 + u_i$$

其中$\mathbb{E}\left(u_i|x_i\right) = 0$。

- 我们在估计如上模型时，可能会出现错误设定问题，比如忽略了平方项，仅仅使用了如下一元线性回归模型进行估计:

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_i + e_i$$

- 而一个更加“全面”的模型也许应该是

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + v_i$$

过度识别检验与LM检验

多项式回归阶数

- 为了检验一元线性回归模型的正确性，我们可以通过如上三次多项式的模型中使用原假设：
$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$$
- 如果使用GMM估计，可以假定$\mathbb{E}\left(v_i|x_i\right) = 0$得到矩条件
$$\mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ x_i \\ x_i^2 \\ x_i^3 \end{bmatrix} v_i\right) = 0$$
其中有4个待估参数和4个矩条件，从而是精确识别。
- 此时可以使用Wald检验、LM检验等对以上原假设进行检验，其中$r = 2$。

过度识别检验与LM检验

多项式回归阶数

- 或者在一元线性回归中，我们可以假定$\mathbb{E}\left(e_i|x_i\right)=0$，使用与以上三次项回归中相同的矩条件

$$\mathbb{E}\left(\begin{bmatrix}1\\x_i\\x_i^2\\x_i^3\end{bmatrix}e_i\right)=0$$

  进行GMM估计。
- 按照我们设定的数据生成过程，一元线性回归中没有加入x_i^2这一项，从而这一项会进入e_i中，从而以上矩条件中的$\mathbb{E}\left(x_i^2e_i\right)=0$就不再成立。
  - 我们可以使用过度识别检验对其进行检验

过度识别检验与LM检验

多项式回归阶数

代码 2: 过度识别检验

```
// overid_reg_sq.do
clear
set seed 250211
set obs 100
// DGP
gen x  = rnormal()*2
gen x2 = x^2
gen x3 = x^3
gen y  = 1+2*x+x2+rnormal()*2
// GMM est and test
gmm (y-{xb: x}-{alpha}), instruments(x x2 x3)
estat overid
```

过度识别检验与LM检验

多项式回归阶数

- 可见在以上数据生成过程的前提下，一元线性回归中过度识别检验（$G-K=4-2=2$）显著，从而存在不正确的矩条件。
- 注意到在三次项的回归中，在原假设$H_0:\beta_2=\beta_3=0$的前提下，实际估计的方程与一元线性回归完全相同，从而得到的$\hat{v}_i=\hat{e}_i=y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}_1 x_i$
- 以上一元线性回归的过度识别检验等价于三次项回归中施加2个约束的LM检验。